Chapitre. 0:
RAPPEL MATHEMATIQUE

1. Rappel

On désignera par $ox_1x_2x_3$, dans un espace vectoriel euclidien **E** de dimension 3, un repère orthonormé direct, c'est-à-dire que si $\vec{e}_i (i = 1,2,3)$ désigne le vecteur unitaire de l'axe ox_i **on a :**

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases} \text{ où } \delta_{ij} \text{ est } \textbf{\textit{le symbole de Kronecker}}$$

$[\delta] = [\mathrm{Id}]$ désigne le tenseur identité 2^{nd} ordre, qui est symétrique.

1.1.Convention d'indice muet et d'indice franc (ou convention d'Einstein)

Pour éviter à écrire de nombreux signes de sommation **Σ**, il conviendra que lorsque dans un monôme un indice figure deux fois, cela signifie qu'il y a sommation sur cet indice. Un tel indice est appelé indice **muet** (ils prennent toutes les valeurs possibles).
Un vecteur $\vec{x}$ dans la base orthonormée $\{\vec{e}_i\}$ s'écrit alors :

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = x_i\vec{e}_i$$

Les indices qui ne sont pas des indices muets sont des indices **francs ou fixe** (ils prennent une seule valeur). Cette convention est très commode en calcul matriciel (ou calcul tensoriel).
Ainsi l'expression de la forme :

$$F_i = A_{ij}B_j = A_{i1}B_1 + A_{i2}B_2 + A_{i3}B_3$$

Comportel'indice **muet*j***(par rapport auquel on somme) et l'indice **franc*i***. L'indice franc doit alors apparaître des deux côtés d'une égalité.
Naturellement, tous les changements de lettre sont licites (autorisés) pour un indice muet, puisqu'on a indifféremment :

$$x_i y_i = x_j y_j = x_p y_p = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Néanmoins, les lettres choisies pour les indices francs et les indices muets devront être différentes, et que si on a deux sommations indépendantes dans un même monôme, on choisira une lettre distincte pour chacun des indices muets correspondants. En d'autres termes, on ne devra jamais trouver plus de deux fois le même indice dans un monôme.
Remarque :

$$\mathrm{trace}(M) = M_{ii} = M_{kk} = M_{ll}$$

1.2.Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ s'écrit, en utilisant la ***notation indicielle***, par :

$$\vec{x}.\vec{y} = x_i y_i = x_k y_k$$

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ s'écrit, en utilisant la ***notation vectorielle***, par :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \left\|\vec{U}\right\| . \left\|\vec{V}\right\| . \cos(\theta)$$

θ est l'angle formé par les deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

1.3.Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ s'écrit:

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{vmatrix}$$

Expression analytique dans une base orthonormée directe :

$$\left\| \vec{X} \wedge \vec{Y} \right\| = \left\| \vec{X} \right\| . \left\| \vec{Y} \right\| |\sin \theta|$$

Ce produit vectoriel peut s'écrire dorénavant par l'expression **contractée suivante** :

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \varepsilon_{ijk} x_j y_k \vec{e}_i \qquad \text{Où } \varepsilon_{ijk} \text{ désigne le } \textbf{symbole de permutation}$$

$[\varepsilon]$ est un tenseur du **troisième ordre**, qui est antisymétrique.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \quad si \quad (i,j,k) & \text{est une permutation circulaire paire de } (1,2,3) \\ -1 \quad si \quad (i,j,k) & \text{est une permutation circulaire impaire de } (1,2,3) \\ 0 \quad si \quad (i,j,k) & \text{n'est pas une permutation de } (1,2,3) \text{ c.à.d 2 indices au moins sont égaux} \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x}$$

Exemple :

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki} \quad ; \quad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji}$$

$$\varepsilon_{112} = \varepsilon_{122} = \varepsilon_{323} = 0 \quad ; \quad \varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = 1 \quad ; \quad \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$$

1.4.Formules d'analyse vectorielle et tensorielle

Le système d'axe **ox$_i$** est un système cartésien.

Le ***vecteur gradient*** d'une fonction scalaire $f(x_1, x_2, x_3)$, est la fonction **vectorielle** définie par :

$$\overrightarrow{gra}\, df = \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i = f_{,i} \vec{e}_i = \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \vec{e}_3 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = \vec{\nabla} f \, .$$

Le ***gradient*** associé à un vecteur $\vec{F}$, est le **tenseur** défini par :

$$\overline{\overline{gra}}\, d\vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

La ***divergence*** associée à un vecteur $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$, est la fonction **scalaire** définie par :

$$div\vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{i,i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = trace\left(\overline{\overline{gra}}\, d\, \vec{u}\right).$$

Le ***laplacien*** d'une fonction scalaire $f(x_1, x_2, x_3)$, est la fonction **scalaire** définie par :

$$\Rightarrow \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = \nabla^2 f$$

Le ***rotationnel*** associée à un vecteur $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$, est la fonction **vectorielle** définie par :

$$\vec{\mathrm{Rot}}\vec{\mathrm{U}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathrm{U}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{x}_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{x}_3} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} \mathrm{U}_1 \\ \mathrm{U}_2 \\ \mathrm{U}_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{U}_3}{\partial \mathrm{x}_2} - \dfrac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial \mathrm{x}_3} \\ \dfrac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial \mathrm{x}_3} - \dfrac{\partial \mathrm{U}_3}{\partial \mathrm{x}_1} \\ \dfrac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial \mathrm{x}_1} - \dfrac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial \mathrm{x}_2} \end{pmatrix}$$